Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana
Dipartimento formazione e apprendimento

SUPSI

Pensiero matematico… in verticale

Dr Alberto Piatti, responsabile della formazione SUPSI-DFA

Lissone, 7-8-9 settembre 2015

Il Dipartimento Formazione e Apprendimento della SUPSI

- È la scuola che si occupa della formazione dei docenti nella Svizzera Italiana
- È un'alta scuola pedagogica
- Fa parte della Scuola Universitaria Professionale della Svizzera Italiana
- Quattro cicli di studio:
  1. Bachelor in Insegnamento per il livello prescolastico (circa 70 studenti)
  2. Bachelor in Insegnamento per il livello primario (circa 160 studenti)
  3. Master in Insegnamento per il livello secondario I (circa 160 studenti)
  4. Diploma in Insegnamento per le scuole di maturità (circa 20 studenti)
- Sito web: www.supsi.ch/dfa

Problemi introduttivi

Cosa si calcola con la seguente formula?

$$\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}$$

Il gioco dei nanetti

Il gioco dei nanetti

- Sei colori: rosso, giallo, verde, blu, rosa, viola
- Ogni nanetto con cappello, maglia e pantaloni
- Ogni capo di vestiario di uno dei sei colori sopra
- Possibile la ripetizione di colori
- Un nanetto per ogni combinazione di colori

- Il giocatori si radunano attorno ai nanetti sparpagliati sul tavolo
- Un giocatore tira simultaneamente i tre dadi
- La combinazione di colori risultante dai dadi corrisponde a un nanetto
- Il primo giocatore che agguanta il nanetto con la combinazione data vince

Un altro problemino…

- Quanti nanetti ci sono in tutto nella scatola?

Attività uno: costruiamo i nanetti

- Su un foglio A4 disegniamo un nanetto in mutande
- Ritagliamo una serie di cappellini (in 2D) di tre colori diversi (giallo, rosso e blu) e li mettiamo in una scatola
- Facciamo lo stesso con i maglioni e i pantaloni

- Diamo una fotocopia del nanetto in mutande a ogni bambino, e gli chiediamo di vestirlo incollando un cappellino, un maglione e dei pantaloni, scelti in modo da non ripetere lo stesso colore

- Esponiamo i nanetti preparati dai bambini e proviamo a capire insieme quanti nanetti diversi sono stati preparati
- Quanti nanetti diversi abbiamo ottenuto? Ce ne sono degli altri?

- In che classe possiamo proporre questa attività?

Varianti dell’attività 1

- Quanti nanetti con due colori diversi posso creare a partire da tre colori?
- Data una combinazione di colori (ad es. due rossi e un giallo), quanti nanetti abbiamo con la combinazione data?

Soluzioni

- Situazione 1:
- Ho tre possibilità per scegliere il cappello
- Solo due per scegliere il maglione (un colore l'ho già usato per il cappello)
- La scelta dei pantaloni è obbligata
- In tutto ci sono 3 x 2 = 6 possibilità

- Variante:
- Scelgo il colore che si ripete due volte, ho tre possibilità
- Scelgo il colore che si ripete una sola volta: ho due possibilità
- Scelgo in che posizione mettere il colore che non si ripete, ho tre possibilità
- In tutto ho 18 possibilità
- Data una combinazione, i nanetti sono tre (le tre possibilità di posizionare il colore singolo)

Attività 2: aumentiamo i colori

- Quanti nanetti con tre colori diversi posso comporre partendo da 6 colori?
- Quanti nanetti con due colori diversi posso comporre partendo da 6 colori?
- Quanti nanetti posso comporre con un solo colore, partendo da 6 colori?
- Chiediamo ai bambini di disegnarli tutti
- In quale classe posso proporre questa attività?

Soluzioni

- Tre colori diversi: scelgo il colore del cappello (ho sei possibilità), il colore del maglione (ho 5 possibilità), il colore dei pantaloni (ho 4 possibilità), in tutto ho:

$$6 \times 5 \times 4 = 120 \text{ possibili nanetti}$$

- Due colori diversi: scelgo il colore che si ripete due volte (6 possibilità) e il colore che si ripete una volta (5 possibilità), scelgo dove posizionare il colore singolo (3 possibilità), in tutto:

$$6 \times 5 \times 3 = 90 \text{ possibili nanetti}$$

- Con tre colori uguali basta scegliere il colore (ho 6 possibilità), quindi 6 nanetti
- In tutto quindi possiamo ottenere 216 nanetti (chi l’avrebbe mai detto…)

Attività 3: ma nella scatola ci sono 216 nanetti?

Il numero di nanetti…

- Per ogni combinazione di colori è presente un solo nanetto!
- Esistono 120 nanetti con tre colori diversi (attività 2) scelti a partire da 6, ma dati tre colori diversi possiamo costruire sei nanetti diversi (attività 1) con la data combinazione di colori, di questi è abbastanza sceglierne uno. Di conseguenza, le combinazioni possibili di tre colori a partire da sei è 120:6=20 nanetti.
- Esistono 90 nanetti con due colori scelti a partire da sei colori (attività 2), ma data una combinazione ci sono tre nanetti possibili (attività 1), quindi le combinazioni diverse possibili sono 90:3=30.
- Ci sono sei nanetti con tre colori uguali.

- In tutto i nanetti sono 20+30+6=56 nanetti!
- È giusto? Basta contarli nella scatola.

Sveliamo il mistero….

$$\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}$$

Sveliamo il mistero…

- Calcolate la seguente formula con n=6 e k=3 (ricordatevi che n!=1×2×…×n):

$$\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}$$

- La soluzione è …. 56!
- La formula permette di calcolare le combinazioni di k colori scelti da un insieme di n colori, con la possibilità di ripetere i colori (combinazioni con ripetizioni)

Generalizziamo…

- Quanti nanetti avremmo nel gioco se ci fossero solo maglione e pantaloni?
- E se i nanetti avessero anche la sciarpa?
- E se i colori fossero 10?

Generalizziamo…

- Sarebbero 21 nanetti (esiste la versione, sotto il nome di Picco Duetto)

- E se i nanetti avessero anche la sciarpa? Avremmo n=6 e k=4, 126 nanetti
- E se i colori fossero 10? Avremmo n=10 e k=3, quindi 220 nanetti

Ma la formula da dove salta fuori?

- Per ricavare la formula è necessario eseguire una serie di passaggi in maniera simbolica
- È molto difficile (impossibile?) ricavarla direttamente dagli esperimenti svolti prima
- Per prima cosa troviamo la formula per ricavare il numero di combinazioni senza ripetizioni (equivalenti dunque ai nanetti con vestiti tutti di colori differenti)

Numero di combinazioni senza ripetizioni

- Supponiamo di avere n colori e di doverne scegliere k
- Per scegliere il primo colore abbiamo n possibilità, per il secondo n-1, per il terzo n-2, ecc. Per il k-esimo colore abbiamo n-k+1 possibilità, in tutto:

$$n(n-1)\ldots(n-k+1)=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots..1}{(n-k)(n-k-1)\ldots1}=\frac{n!}{(n-k)!}$$

- Data una combinazione di colori, possiamo comporre diversi nanetti scegliendo il colore di ogni capo di vestito: abbiamo k possibilità per il primo capo, (k-1) per il secondo, ecc. per l'ultimo capo la scelta è obbligata, in tutto:

$$k(k-1)(k-2)\ldots1=k!$$

Numero di combinazioni senza ripetizioni

- Con la prima formula calcoliamo il numero totale di nanetti, ma ogni combinazione si ripete k! volte. Per avere il numero totale di combinazioni dobbiamo quindi dividere la formula per k!, si ottiene

$$\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

- Che è la formula comunemente usata per calcolare il numero di combinazioni senza ripetizione.

Numero di combinazioni con ripetizione

- La dimostrazione della forma è basata su un passaggio che permette di ricondurre il numero di combinazioni con ripetizione alla formula delle combinazioni senza ripetizione
- Numeriamo gli n colori: 1 per il primo colore, 2 per il secondo, 3 per il terzo, …
- Una combinazione può essere rappresentata indicando dal più piccolo al più grande i numeri riferiti ai colori che la compongono, ottiene una sequenza di k numeri tra 1 e n

Ad esempio…

- Ad esempio consideriamo n=6 e k=3, quindi i nostri nanetti. Indichiamo: 1=rosso, 2=giallo, 3=blu, 4=verde, 5=viola, 6=rosa.
- Che nanetto sarebbe quello relativo alla sequenza 133 ?
- Che sequenza avrebbe il nanetto rosso giallo e blu?

Il passaggio segreto…

- Considera una sequenza (non decrescente) di k numeri scelti dall'insieme

$$\{1,2,3,\ldots,n\}$$

- Aggiungi alla seconda cifra 1, alla terza 2, ..., all'ultima (k-1), si ottiene una sequenza crescente di k numeri scelti dall'insieme

$$\{1,2,3,\ldots,n+k-1\}$$

- Il numero di sequenze del primo tipo è pari al numero di sequenze dle secondo tipo (corrispondenza biunivoca)

Ci siamo

- Le sequenze crescenti di k numeri scelti dall'insieme

$$\{1, 2, 3, \ldots, n+k-1\}$$

- Corrispondono al numero di combinazioni senza ripetizioni di k colori
- Scelti a partire da n+k-1colori
- Queste combinazioni sono in tutto

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n+k-1-k)!k!} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$$

- La nostra formula! Che fatica però…..

Senso e significato

Significato e senso di un concetto matematico

- Significato: condiviso all'interno di una comunità (scientifica)
- Senso: personale e soggettivo

Contrapposizione tra generale e individuale.

Il significato di un concetto matematico

- *I significati non esistono, se non nelle coscienze delle persone* (Leont’ev 1978)
- Costrutto storico, culturale e politico
- Condiviso all’interno di una comunità (scientifica)
- Appartenente a una coscienza collettiva
- Ad es. una definizione di un concetto

- Il significato di un concetto è oggettivo…
- Ma non è però per forza stabile e statico
- Risultato di tensioni e visioni contrapposte
- È in continua evoluzione

Esercizio (significato di piramide)

- Cos’è una piramide per la comunità scientifica?

Definizione di piramide

In **geometria** si definisce piramide **un poliedro** individuato da una **faccia poligonale** chiamata base e da un **vertice** che non giace sul **piano della base** e che talora viene chiamato apice della piramide.

Sono suoi spigoli i **lati del poligono di base** e i **segmenti delimitati dall'apice e da ciascuno dei vertici della base**. Sono **facce della piramide** la sua base e le facce triangolari (chiamate facce laterali) che hanno come vertice il suo apice.

(da Wikipedia…?!)

Il senso di un concetto matematico

- Insieme di tutte le **esperienze**
- che **una persona**
- ha **vissuto**
- con un dato concetto;
- le **immagini, le parole, i ricordi, i gesti** legati a quelle esperienze

Esercizio (senso di una piramide)

- Se vi dico piramide, cosa vi viene in mente?
- Provate ad evocare nella vostra mente tre situazioni che avete vissuto (a scuola o fuori dalla scuola) in cui avete avuto a che fare con delle piramidi

Senso e significato

- Significato: coscienza collettiva
- Senso: coscienza individuale
- le coscienze individuali non sono e non potranno mai essere riproduzioni in scala della coscienza collettiva
- *le forme oggettive e soggettive del significato non coincideranno mai*

Un riferimento bibliografico… e un riassunto in italiano

- Radford, L., Schubring, G. e Seeger, F.
- Signifying and meaning-making in mathematical thinking, teaching and learning.
- Educ Stud Math (2011) 77:149–156.

E un breve riassunto in italiano:

- Piatti, A.,
- Il senso e il significato dei concetti in matematica
- Bollettino dei docenti di matematica (2015) 70.

Raccomandazioni e consigli pratici (1)

- Permettete agli allievi di **vivere esperienze legate al concetto**
- **utilizzando diversi modi per rappresentare** il concetto
- chiedendo agli allievi di affrontare **situazioni problema**
- dove il **concetto svolge un ruolo chiave**
- **Un concetto deve esistere per qualcosa**, e deve servire adesso
- Una rappresentazione deve mostrarsi migliore di un'altra alla prova dei fatti
- e non perché il docente l'ha imposta

Raccomandazioni e consigli pratici (2)

- Lasciate che gli allievi scelgano le **proprie strategie di risoluzione**
- che utilizzino le rappresentazioni per loro più appropriate
- Fate in modo che possano **utilizzare diversi registri semiotici**
- **sia per ragionare** e lavorare sul problema, **sia per esplicitare la soluzione** ai propri compagni e al docente
- **Troppo spesso** chiediamo agli allievi di **esplicitare le loro soluzioni a voce**
- o con registri che non sono quelli che ha utilizzato per risolvere il problema
- Ricordiamoci che il passaggio da un registro a un altro è tutt’altro che scontato

Raccomandazioni e consigli pratici (3)

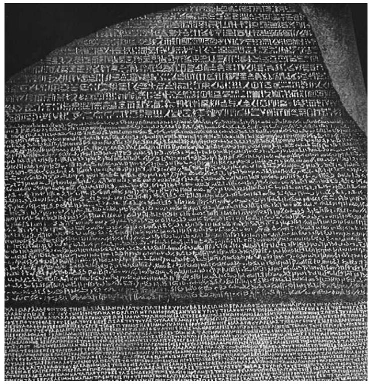
- Favorite forme didattiche che prevedano uno **scambio critico tra gli allievi**
- in modo che le strategie e i registri più adeguati
- data una certa situazione
- possano emergere attraverso la **ricerca di un consenso**
- e la **costruzione di una coscienza collettiva della classe**.

Raccomandazioni e consigli pratici (4)

- Mostrate agli allievi lo **sviluppo** che i concetti matematici hanno avuto **nella storia e nelle diverse culture**
- la storia della matematica è un potente strumento per **togliere alla matematica la sua aura platonica**
- per mostrarla come **prodotto dell'intelletto e delle relazioni umane**
- Incoraggiateli e **legittimateli ad assumere una postura critica** nei confronti del significato di un concetto matematico

Raccomandazioni e consigli pratici (5)

- Quando trattate un dato concetto in classe, **utilizzate molti registri**, anche **contemporaneamente**
- in modo che ogni allievo possa **ritrovare quelli più vicini al suo senso del concetto**
- e che allo stesso tempo possa **far evolvere il proprio senso verso altre rappresentazioni**



Raccomandazioni e consigli pratici (6)

- Non illudetevi che l'apprendimento di un concetto possa svolgersi in modo lineare
- Il senso (e dunque anche il significato) di un concetto, evolve nel tempo e richiede che l'allievo viva diverse esperienze legate al concetto, in diversi momenti, e con i dovuti tempi di riflessione e scambio
- È dunque fondamentale staccarsi da una progettazione lineare
- per favorire un processo di insegnamento-apprendimento a spirale
- Lungo tutto l'arco della scuola dell'obbligo e oltre

Esperimento 1 (nella vita di tutti i giorni)

- Svolgete il seguente esperimento, a coppie

- Il primo membro della coppia deve spiegare all'altro come aprire una bottiglia di vino
- Durante la spiegazione non può usare nessun gesto e nessuna mimica, solo la voce

- Il secondo membro della coppia deve spiegare all'altro come sbucciare una banana
- Durante la spiegazione può gesticolare a piacimento

Esperimento 2 (in matematica)

- Svolgete il seguente esperimento, a coppie

- Il primo membro della coppia deve spiegare all'altro come costruire un asse di simmetria di un cerchio utilizzando riga e compasso
- Durante la spiegazione non può usare nessun gesto e nessuna mimica, solo la voce

- Il secondo membro della coppia deve spiegare all'altro la stessa cosa, senza nessun vincolo

L’embodiment

- Che ruolo ha l’esperienza fisica e percettiva (*embodiment*) nell’apprendimento della matematica…

- … nella scuola dell’infanzia?
- … nella scuola primaria?
- … nella scuola secondaria di I grado?
- … nella scuola secondaria di II grado?
- … all’università?

- E nella vita di tutti i giorni?

Importanza dell’embodiment

- **L’apprendimento** di qualsiasi concetto matematico **ha inizio con esperienze concrete**, basate sui sensi e **vissute con il proprio corpo** (embodied)

- **Queste esperienze, prevalenti** ma non esclusive a livello di apprendimento della matematica **nella scuola dell’infanzia** e della scuola primaria, **perdono gradualmente d’importanza** nelle scuole secondarie dove la dimensione simbolica prende il sopravvento

- Nonostante, con l’avanzare dell’età, la dimensione simbolica tenda ad assumere la prevalenza, **l’esperienza fisica e percettiva non può essere mai tralasciata**

I tre mondi della matematica di David Tall

La finalità dell'insegnamento della matematica nella scuola dell'obbligo

- **obiettivo principale** dell'insegnamento della matematica nella scuola dell'obbligo è **sviluppare negli allievi la capacità di pensiero matematico**
- ovvero la **capacità di riflettere, interpretare e decidere in maniera razionale** in situazioni complesse che possono presentarsi nella vita di tutti i giorni
- Questo richiede all'allievo di appropriarsi di una serie di **concetti, schemi d'azione, strategie di pensiero e d'azione e atteggiamenti**
- che possano essere **richiamati velocemente in mente nel momento del bisogno**

La finalità dell'insegnamento della matematica nella scuola dell'obbligo

- Per raggiungere questo obiettivo
- la docente è chiamata a **far vivere all'allievo situazioni problematiche** di complessità variabile
- e a **far elaborare a livello cognitivo e/o metacognitivo** quanto vissuto
- in modo da **rendere pensabili i concetti, le procedure e le strategie messe in atto**

Un articolo di riferimento… e un riassunto in italiano

- A theory of Mathematical Growth through Embodiment, Symbolism and Proof
- David Tall (http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall)
- Centre for Education Studies, University of Warwick
- Annales de Didactique et de sciences cognitives (2006) 11, 195-215
- IREM de Strasbourg (http://irem.unistra.fr/)

Breve riassunto in italiano:

- Piatti et al. (2015)
- I tre mondi della matematica secondo David Tall
- Bollettino dei docenti di matematica 70, Bellinzona

Un libro per approfondire

- How Humans Learn to Think Matematically
- Exploring the three worlds of mathematics
- David Tall, 2013
- Cambridge University Press

Domanda preparatoria 1

- Che cos’è 3 x 5?
- È un processo o un concetto?

Domanda preparatoria 2

- Che cosa è la geometria euclidea?

Riposta alla domanda 1: il procetto

- 3 x 5 può essere interpretato come un'operazione con un suo schema risolutivo (quindi un **processo**)
- 3 x 5 può pure essere interpretato come moltiplicazione in quanto **concetto**

- La risposta dunque è… entrambi. Tall parla di **procetto** (*procept*)

- Il procetto è il punto di arrivo di un lungo percorso di apprendimento del concetto considerato

Dall’incapacità di risolvere un problema.. al procetto

1. Pre-procedurale: nessuna soluzione o soluzione parziale
2. Procedurale: una modalità di soluzione passo per passo
3. Multi-procedurale: scelta tra diverse procedure (ricerca di efficienza)
4. Processo: soluzione flessibile con alternative concettuali
5. Procetto: capacità di riflettere in merito al concetto considerato (simbolicamente)

Ad esempio: la moltiplicazione

1. Pre-procedurale: nessuna soluzione o soluzione parziale
2. Procedurale: ad es. algoritmo in colonna
3. Multi-procedurale: ad esempio calcolo in colonna oppure calcolo in riga
4. Processo: calcolo mentale, mentale-scritto e mentale-calcolatrice
5. Procetto: capacità di riflettere sulla moltiplicazione (ad esempio ricerca di proprietà)

Risposta alla domanda 2: compressione e connessione

- La mente umana è in grado di elaborare moltissima informazione e svolgere molte operazioni in parallelo a livello subconscio
- È per contro in grado di considerare a livello conscio solo un piccolo numero di oggetti

- Per poter essere pensati, **i concetti devono essere compressi** e riassunti tramite concetti pensabili (thinkable concepts), ad esempio simboli o parole
- I concetti pensabili devono essere **connessi tra di loro**, per poter **(ri-)creare schemi di azione**, rispettivamente **schemi di conoscenza**
- Ad esempio: 3 x 5 come operazione (schema di azione) o la geometria euclidea (schema di conoscenza)

Il pensiero di fondo di D. Tall

La ***costruzione a lungo termine della conoscenza matematica*** *utilizza il potere del cervello con* ***input tramite la percezione****,* ***output tramite l'azione****e il potere interno della* ***riflessione per (ri-)assemblare le idee in strutture mentali utilizzabili***

Ipotizzo che il pensiero matematico evolva attraverso ***tre mondi della matematica*** *connessi tra di loro, ognuno con le sue proprie modalità di sviluppare una complessità più elevata*

I tre mondi della matematica

- Primo mondo: **concettuale – incorporato** (conceptual – embodied)
- Secondo mondo: **procettuale – simbolico** (proceptual – symbolic)
- Terzo mondo: **formale – assiomatico** (formal – axiomatic)

L’apprendimento lungo tutto l’arco della vita

- La teoria di Tall permette di
- modellare e analizzare
- il **processo pluriennale**
- che porta **all’apprendimento dei concetti matematici**
- partendo **dalle prime esperienze percettive** nella **prima infanzia**
- fino alla **simbolizzazione** nell’**età della (pre-)adolescenza**
- ed eventualmente all’**assiomatizzazione** in **età adulta**

Il mondo concettuale - incorporato

- *basato sugli **oggetti***
- *fa riferimento ai sensi per osservare, descrivere, definire e dedurre proprietà*
- In questo mondo **una proprietà vale perché la si vede**, la si percepisce

Il mondo procettuale - simbolico

- *basato sull'azione*
- *schemi d'azione sono compressi in concetti pensabili (spesso simboli)*
- *con la doppia funzione di processo e concetto (procetto)*
- In questo mondo una proprietà vale perché la si calcola

Il mondo formale - assiomatico

- *basato sulle proprietà*
- *consistente in sistemi di assiomi, definizioni formali e dimostrazioni*
- *basate sulla teoria degli insiemi*
- In questo mondo una proprietà vale perché la si può derivare tramite procedure logiche a partire da assiomi dati

Quali mondi in quali scuole?

- Ad esempio, **l’apprendimento del concetto di numero**
- **ha inizio nella manipolazione e nel conteggio di oggetti** nella SI
- nella scuola primaria primo e secondo mondo convivono
- il primo mondo **perde importanza nelle scuole secondarie**
- **la dimensione simbolica prende il sopravvento**
- proseguendo con una carriera di studi scientifici
- **la dimensione simbolica viene ulteriormente astratta**
- per giungere a **definizioni formali e a sistemi di assiomi**

Un mondo non sussiste senza i precedenti

- Nonostante, con l’avanzare dell’età, la dimensione simbolica tenda ad assumere la prevalenza, **l’esperienza fisica e percettiva non può essere mai tralasciata**
- chiunque, di fronte a un problema geometrico complesso, **di regola inizia tracciando uno schizzo della situazione**: una rappresentazione percettiva
- in seguito può darsi che il problema venga risolto anche esclusivamente con il calcolo, dunque a livello simbolico
- le esperienze percettive fungono da fondamenta per il livello simbolico: un terreno solido su cui appoggiarsi in caso di necessità
- Forse proprio per questo motivo, quando si pone un allievo di fronte a situazioni problema complesse, **spesso si assiste a un’apparente regressione dal mondo simbolico a quello percettivo**

Andate e ritorno dai vari mondi

- a un certo momento dello sviluppo, gli allievi (in particolare i più dotati) tenderanno, **di fronte a determinate situazioni problema, a privilegiare la dimensione simbolica**
- mentre **di fronte ad altre situazioni tenderanno a rifugiarsi o a privilegiare la dimensione percettiva** (in particolare gli allievi più in difficoltà)
- **Il continuo passaggio dalla dimensione percettiva a quella simbolica e viceversa è un processo virtuoso** che dovrebbe avvenire sempre, in particolare a scuola primaria e secondaria di primo grado
- facendo bene attenzione di non forzare la dimensione simbolica (creando difficoltà ulteriori agli allievi già in difficoltà o privando altri allievi delle necessarie fondamenta), rispettivamente evitando di soffermarsi eccessivamente nella dimensione percettiva (limitando artificialmente gli allievi più dotati e motivati rispetto al problema dato)

I mondi della matematica nella progettazione

- Quando si progetta e/o si realizza un'attività didattica in matematica **è fondamentale decidere a quale mondo si vuole dare la prevalenza**
- Attenzione: **nessun apprendimento di tipo simbolico** può avvenire **senza che sia prima avvenuta un'esperienza** a livello concreto
- Attenzione: **nessun apprendimento in matematica parte da zero**

- In questo senso, sono interessanti i concetti di set-before (impostato-prima) e met-before (incontrato-prima) introdotti da Tall.

Impostati-prima e incontrati-prima (set- e met-before)

- **impostato-prima**: un concetto matematico presente nella testa dell'allievo da prima o poco dopo la nascita, come ad esempio la numerosità di piccoli insiemi
- **incontrato-prima**: un concetto, una procedura, una strategia, ecc. già sviluppata in precedenza dall'allievo, che viene riattivata in un nuovo contesto
- Dal punto di vista didattico la differenza tra impostato-prima e incontrato-prima è irrilevante

Incontrati – prima: sono un bene o un male?

- **In alcuni casi**, gli incontrati-prima hanno **un ruolo positivo** e utile nell’affrontare una nuova situazione problema
- **in altri casi** invece **si rivelano inadeguati alla nuova situazione** e quindi da eliminare e/o ristrutturare
- La **costruzione a lungo termine del pensiero matematico** non si prefigura dunque come una costruzione lineare
- quanto piuttosto come **un continuo processo di evocazione, ristrutturazione e ampliamento**, se non addirittura di eliminazione per quanto possibile, di incontrati-prima

I mondi convivono

- parte degli incontrati-prima che si riscontrano lavorando a livello procettuale-simbolico si situano inesorabilmente nel mondo concettuale-incorporato
- Allo stesso modo, lavorando a livello formale-assiomatico, si riscontrano incontrati-prima afferenti ai due mondi precedenti
- In sintesi, **è inevitabile che lavorando in un mondo si sia confrontati anche con aspetti dei mondi precedenti**
- Per poter essere realmente efficace ed incisivo, la docente non può fare astrazione di questi aspetti nel progettare e realizzare attività didattiche per e con i suoi allievi

Personalizzazione

- **gli impostati-prima e gli incontrati-prima sono altamente soggettivi**
- sono legati alle caratteristiche e alle esperienze di ciascun individuo
- la docente dovrebbe fare in modo di considerare le caratteristiche individuali di ciascun allievo rispetto a un dato concetto matematico o a una data situazione problema
- per poter fornire un reale contributo allo sviluppo del suo pensiero matematico.

Raccomandazioni (1)

Il ritorno a una dimensione percettiva è rassicurante per studenti di qualsiasi età. Si può sfruttare questo aspetto per aiutare allievi in difficoltà a rinfrancarsi in una data situazione problema, ad esempio fornendo come aiuto un disegno, un oggetto, ecc.

Raccomandazioni (2)

La scelta del mondo su cui focalizzare una data attività è una scelta fondamentale, che implica forzatamente un livello di complessità diverso per l'allievo.

La stessa situazione problema spesso si presta ad essere affrontata in diversi mondi.

Da questo punto di vista, proporre a tutti gli allievi la stessa situazione problema permettendo loro di scegliere liberamente le strategie risolutive e il mondo in cui muoversi può essere **uno strumento interessante di differenziazione didattica**.

Raccomandazioni (3)

- Il passaggio da un mondo al successivo non implica necessariamente un aumento di complessità delle situazioni affrontate
- È possibile proporre problemi molto semplici a livello simbolico, così come situazioni molto complesse a livello percettivo
- Si pensi ad esempio che tutti gli Elementi di Euclide sono basati esclusivamente su un approccio di tipo percettivo basato sulle costruzioni geometriche
- In questo senso è interessante esplorare i limiti di ciascun mondo, proponendo ad esempio situazioni molto complesse a livello percettivo, come potrebbero essere alcune costruzioni geometriche molto complesse da realizzare con riga e compasso

Raccomandazioni (4)

- Nello sviluppo dei procetti è **fondamentale confrontare strategie risolutive diverse per un problema dato**
- Quando fate risolvere una situazione problema ai vostri allievi **fate in modo di evidenziare le diverse strategie emerse (giuste o sbagliate che siano)** in modo che possano essere discusse, confrontate ed eventualmente corrette
- Concretamente, al termine di un momento di risoluzione a gruppi o individuale, **chiedete a più allievi contemporaneamente (che abbiano sviluppato strategie differenti) di scrivere le loro soluzioni alla lavagna**
- Lasciate che ciascuno descriva quanto fatto, quindi fate tornare tutti al posto (in modo che le soluzioni vengano spersonalizzate) e aprite una discussione su quali siano le strategie più o meno corrette, rispettivamente efficaci e/o efficienti

Ripartiamo dai nanetti

La seguente formula è un procetto?

$$\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}$$

Esercizi per i prossimi giorni

Consegna per martedì 8 settembre

- Dividetevi in gruppi di una decina di persone
- possibilmente con docenti di vari ordini scolastici
- Identificate un procetto
- Definite tre attività didattiche: una per ogni ordine scolastico, dalla scuola dell’infanzia alla scuola secondaria di primo grado, volte a sviluppare il procetto dato
- Evidenziate per ogni attività le vostre scelte relative ai mondi e gli incontrati-prima considerati
- Preparatevi a presentare i vostri risultati in plenaria alle colleghe e ai colleghi

Mercoledì 9 settembre

- Presentazione dei risultati dei gruppi (circa 15 minuti per gruppo)
- Sintesi finale e conclusione