**Gioco dei nanetti – alcuni spunti matematici**

Il gioco dei nanetti consiste in tre dadi uguali, ciascuno con sei facce di sei colori differenti (viola, rosa, rosso, verde, giallo, blu) e 56 carte nanetto con tutte le possibili combinazioni di colori (con ripetizione). Durante il primo incontro del corso (8 ottobre 2014) abbiamo giocato al gioco ma non abbiamo avuto la possibilità di entrare in profondità nei meccanismi matematici del gioco. Eccovi dunque qualche spunto.



**Perché i nanetti sono proprio 56?**

Il calcolo delle combinazioni di colori possibili non è semplicissimo. Matematicamente si tratta di un problema di calcolo delle combinazioni con ripetizioni. Praticamente dobbiamo capire in quanti modi è possibile scegliere tre colori a partire da sei, considerando che si possono ripetere anche gli stessi colori. La formula matematica per calcolare il numero di combinazioni di k colori a partire da n, considerando che è possibile ripetere i colori, è la seguente:

$$\frac{\left(n+k-1\right)!}{\left(n-1\right)!k!}$$

dove $n!=1∙2∙…∙n.$ Considerando n=6 e k=3 otteniamo come risultato 56, che in effetti è il numero di nanetti del gioco. Chiaramente questa formula è incomprensibile per qualsiasi allievo dalla scuola media in giù. Quindi dobbiamo trovare un sistema più semplice. Vi mostro un possibile percorso per affrontare il tema con i vostri allievi di SE o SM.

**Passo 1: quanti nanetti dati tre colori diversi?** Supponiamo di avere tre colori diversi e di voler comporre un nanetto. In questo caso il nanetto ha il cappello di un colore, il maglione di un altro e i pantaloni di un altro. Avremmo tre possibilità per scegliere il colore del cappello, due possibilità per il colore del maglione (in colore del cappello non potrebbe più essere usato) e una sola per i pantaloni. In totale avremmo dunque $3∙2∙1$ = 6 nanetti diversi. La formula matematica è in realtà quella relativa alle permutazioni senza ripetizioni, ovvero il calcolo di in quanto modi posso ordinare n elementi diversi tra loro. La risposta è n!. Ad esempio nel caso sopra abbiamo 3!=6.

Una possibile attività sarebbe di chiedere ai ragazzi di scegliere tre colori e disegnare tutti i nanetti possibili. Si potrebbe poi vedere nel gioco quale dei sei nanetti è stato scelto, visto che per ogni combinazione di colori ne è presente uno solo.

**Passo 2: quanto nanetti con due colori diversi?** Dato un colore che si ripete due volte e uno (diverso) che si ripete una volta sola, è semplice calcolare quanti nanetti diversi si possono disegnare. È infatti sufficiente decidere dove mettere il colore singolo: al cappello, al maglione o ai pantaloni, quindi in totale 3 possibilità.

Anche questa è una possibile attività.

**Passo 3: quanti nanetti diversi è possibile disegnare scegliendo tre colori diversi?** Il ragionamento è simile a quello del passo 1. Possiamo scegliere tra 6 colori per il cappello, 5 colori per il maglione (quello del cappello non possiamo più usarlo) e 4 per i pantaloni (idem). In totale $6∙5∙4=120$ nanetti. Questo calcolo corrisponde esattamente alla formula per il numero disposizioni di k oggetti (diversi) a partire da n oggetti, ovvero $n∙\left(n-1\right)…∙\left(n-k+1\right).$

Questa è una bella attività per lavorare con numeri un po’ più grandi. La generalizzazione non è necessaria, ma può essere un buon problema nel secondo ciclo di SM.

**Passo 4: quanti nanetti con tre colori diversi posso ottenere scegliendone solo uno per ogni combinazione di colori?** Nei 120 nanetti che abbiamo appena calcolato, ogni combinazione di colori si ripete 6 volte (vedi passo 1), quindi scegliendone solo uno per ogni combinazione otteniamo in tutto $\frac{120}{6}=20$ nanetti.

**Passo 5: quanti nanetti diversi è possibile disegnare scegliendo due colori diversi?** In questo caso bisogna scegliere il colore che si ripete due volte (6 possibilità) e quello che si ripete una volta sola (5 possibilità), e quindi scegliere in quale posizione mettere il colore singolo (3 possibilità), in tutto $6∙5∙3=90 $nanetti.

**Passo 6: quanti nanetti con due colori diversi posso ottenere scegliendone solo uno per ogni combinazione di colori?** Basta dividere il numero trovato nel passo 5 per 3. I nanetti sono in tutto 30.

**Passo 7: quanti nanetti con tre colori uguali?** Questo è il passo più facile, basta scegliere uno dei sei colori, quindi abbiamo in tutto 6 nanetti monocolore.

**Passo 8: quanti nanetti sarebbe possibile ottenere in tutto?** Se consideriamo tutti i nanetti ne abbiamo 120 di tre colori diversi, 90 con due colori diversi e 6 con un solo colore, quindi 216 nanetti. Lo stesso numero si sarebbe potuto trovare con la formula delle disposizioni con ripetizione: disponendo k oggetti (con ripetizione) scelti a partire da un insieme di n oggetti, abbiamo $n^{k}$ possibilità. Infatti nel nostro caso potevamo scegliere tra 6 colori per il cappello, 6 colori per il maglione e 6 colori per i pantaloni, in tutto $6∙6∙6=6^{3}=216 $**nanetti**. Prendendo un solo nanetto per combinazione di colore, i nanetti totali sono 20 con tre colori diversi, 30 con due colori diversi e 6 monocolore, per un totale di **56 nanetti**.

E così abbiamo trovato la soluzione cercata. È bello notare che tramite il gioco dei nanetti siamo in grado di trattare praticamente tutta la combinatoria elementare. Oltretutto, la presenza del gioco ci permette di verificare l’esattezza di una buona parte dei passi illustrati sopra.

Dal punto di vista della probabilità, il gioco è interessante perché non è equiprobabile. Lanciando i tre dadi insieme abbiamo 216 possibili risultati (il calcolo è lo stesso del passo 8), e ogni risultato è equiprobabile, con probabilità $\frac{1}{216}$.

Dato un nanetto con tre colori diversi, ci sono sei possibili risultati del lancio del dado (vedi punto 1) che danno la combinazione desiderata, quindi la probabilità di ottenere una combinazione di colori corrispondente a un dato nanetto di tre colori è pari a $6∙\frac{1}{216}=\frac{1}{36}$.

Dato un nanetto di due colori, ci sono tre possibili risultati del lancio del dado (vedi punto 2) che danno la combinazione desiderata, quindi in questo caso la probabilità è pari a $3∙\frac{1}{216}=\frac{1}{72}$.

Dato un nanetto monocolore, c’è solo una combinazione dei dadi favorevole, quindi la sua probabilità è pari a $\frac{1}{216}$.

In generale, la probabilità di ottenere un nanetto (qualsiasi) con tre colori diversi è pari a $20∙\frac{1}{36}=\frac{5}{9}=\frac{40}{72}$ , con due colori diversi è $30∙\frac{1}{72}=\frac{5}{12}=\frac{30}{72}$ , con un solo colore è $6∙\frac{1}{216}=\frac{2}{72}$.

Un altro aspetto interessante del gioco è quindi che sembra equiprobabile, ma non lo è!



Buon divertimento!

Alberto