Gocce di didattica
Spunti e riflessioni dalla ricerca in didattica della matematica[1]

Alberto Piatti[2]
Docenti di matematica in formazione al I anno presso la SUPSI-DFA[3]

I tre mondi della matematica secondo David Tall.

Il tema di questo intervento è lo **sviluppo del pensiero matematico lungo tutto l'arco della vita**. La riflessione parte da un articolo[4] del 2006 di David Tall, professore emerito di pensiero matematico presso l'università di Warwick. La teoria di Tall permette di **modellare e analizzare il processo pluriennale che porta all'apprendimento dei concetti matematici, partendo dalle prime esperienze percettive nella prima infanzia fino alla simbolizzazione nell'età dell'adolescenza** ed eventualmente all'assiomatizzazione in età adulta. Questa teoria è ben riassunta in un libro[5] di recente pubblicazione che consiglio a tutti coloro che desiderassero approfondire il tema. L'articolo alla base di questo contributo è stato oggetto di discussione e approfondimento in una serie di lezioni di didattica della matematica destinate a docenti di matematica in formazione presso la SUPSI-DFA a Locarno nel mese di marzo 2015. Nell'ambito di queste lezioni gli studenti sono stati chiamati a scegliere e commentare una citazione dell'articolo e a formulare delle raccomandazioni all'indirizzo dei loro colleghi. In questo contributo, oltre alle citazioni e alle raccomandazioni elaborate dal sottoscritto, riporto pure le raccomandazioni più significative prodotte dagli studenti, affinché le riflessioni prodotte possano effettivamente raggiungere i loro colleghi di tutto il Canton Ticino.

Compressione, connessione e procetti

Per poter analizzare il pensiero di D. Tall è necessario innanzitutto introdurre alcuni concetti fondamentali della sua teoria. Iniziamo con i concetti di **compressione**, **connessione** e **procetto** (*procept*). L'incipit dell'articolo introduce questi tre aspetti, che permettono di collegare il funzionamento del cervello umano con le modalità di apprendimento e insegnamento della matematica.

"In studying mathematical learning from early childhood to adulthood we are involved with two very different frameworks. One is the coherence and structure of mathematics, the other is the biological development of the human mind. The brain has a number of essential aspects that enable us to build a highly sophisticated mathematical mind. First it has a complex parallel-processing structure that carries on many routine operations subconsciously but needs to focus on a small number of conscious items to be able to make coherent decisions. This in turn requires the complementary aspects of mental compression and connection:

---

[1] Gli spunti forniti e le opinioni espresse, pur essendo suggerite dall'articolo considerato, sono da considerarsi un punto di vista soggettivo dell'autore della presente rubrica, che se ne assume la completa responsabilità, e non un risultato di ricerca. L'autore si assume pure la responsabilità per i contributi degli studenti che sono intervenuti nel presente articolo.

[2] Responsabile della formazione dei docenti di scuola media presso la SUPSI-DFA a Locarno e docente di didattica della matematica. alberto.piatti@supsi.ch

[3] Jennifer Andreotti, Gabriele Caffi, Romina Casamassa, Lara Caverzasio, Mattia Chiesa, Leandro Ghisletta, Shady Goro, Massimo Immersi, Pietro Lurati, Fabian Oehen, Debora Poretti, Giulia Ranocchia, Nastasia Reale, Angelo Antonio Ricci, Silvia Righetti, Antonino Sergio Rigogliuso, Letizia Sciolli, Igor Tamagni.

[4] L'articolo, intitolato *A Theory of Mathematical Growth through Embodiment, Symbolism and Proof,* è comparso negli *Annales de didactique et de sciences cognitives*, volume 11, pag. 195-215 ed è disponibile gratuitamente in rete. Altri contributi dell'autore sono disponibili sul suo sito personale: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/

[5] David Tall (2013) How Humans Learn to Think Mathematically. Cambridge university press.

- ***compression** of important ideas into thinkable concepts that can be held in the focus of attention;*
- ***connections** between such thinkable concepts can be built into dynamic action-schemas that connect successive actions in time, and more general knowledge schemas that connect ideas together in webs of relationships."* (David Tall, articolo citato, pag. 195-196).

" *Studiando l'apprendimento in matematica dalla prima infanzia fino all'età adulta, ci si confronta con due contesti molto differenti. Uno è la coerenza e la struttura della matematica, l'altro è lo sviluppo del biologico del cervello umano. Il cervello ha una serie di caratteristiche essenziali che permettono agli esseri umani di sviluppare un pensiero matematico molto sofisticato. Il cervello ha, infatti, una struttura che permette di svolgere in parallelo molte procedure a livello subconscio, ma che allo stesso tempo permette e necessita di manipolare a livello conscio solo un piccolo numero di aspetti al fine di produrre decisioni coerenti. Queste considerazioni ci portano a considerare due aspetti complementari a livello mentale: la compressione e la connessione.*

- *La **compressione** d'idee importanti in concetti pensabili (thinkable concepts) che possano essere considerate a livello conscio.*
- *La **connessione** tra questi concetti pensabili tramite lo sviluppo di schemi d'azione che connettano diverse azioni nel tempo e più in generale di schemi di conoscenza che connettano diverse idee in reti di relazioni.*" (David Tall, articolo citato, pag. 196)

L'obiettivo principale (l'unico?) dell'insegnamento della matematica nella scuola dell'obbligo è sviluppare negli allievi la capacità di pensiero matematico, ovvero la capacità di riflettere, interpretare e decidere in maniera razionale in situazioni complesse che possono presentarsi nella vita di tutti i giorni. Questo richiede all'allievo di appropriarsi di una serie di concetti, schemi d'azione, strategie di pensiero e d'azione e atteggiamenti che possano essere richiamati velocemente in mente nel momento del bisogno. Per raggiungere questo obiettivo, il/la docente è chiamato/a/a a far vivere all'allievo situazioni problematiche di complessità variabile e a far elaborare a livello cognitivo e/o metacognitivo quanto vissuto in modo da rendere pensabili i concetti, le procedure e le strategie messe in atto.

"Compression may occur in a variety of ways:
- *action-schemas may be practised so that they can be performed automatically with little conscious effort, and imagined as a whole as thinkable processes;*
- *processes may be further compressed into thinkable concepts, often by using a symbol to refer both to the process (eg 2+3 as addition) and to the concept (2+3 as sum). A symbol that can be used to switch between a doable process and a thinkable concept is called a procept;*
- *concepts may be categorised and named so that the names can be held in the focus of attention to refer to the categories as thinkable concepts. This occurs in geometry where different figures are categorized to give hierarchies such as square, rectangle, parallelogram, quadrilateral, polygon, each with its own array of related properties. It also happens in arithmetic and algebra with concepts such as prime number, square number, irreducible polynomial, and so on;*
- *… "* (David Tall, articolo citato, pag. 196).

"*La compressione può avvenire in diversi modi:*
- *schemi d'azione possono essere automatizzati tramite esercizi in modo che possano essere svolti con poco sforzo a livello conscio e immaginati nella loro interezza come processi pensabili;*
- *i processi possono essere ulteriormente compressi in concetti pensabili, di solito utilizzando un simbolo per riferirsi sia al processo (ad esempio 2+3 come addizione), sia al concetto (2+3 come somma). Un simbolo che può essere utilizzato sia in riferimento a un processo eseguibile, sia a un concetto pensabile è denominato **procetto**.*
- *i concetti possono essere categorizzati e denominati, in modo che i nomi possano fungere da centro di attenzione per richiamare intere categorie di elementi pensabili. È ad esempio quello che succede in geometria quando si classificano le figure piane: quadrati, rettangoli, parallelo grammi, quadrilateri, poligoni, ecc. dove ciascuna categoria è caratterizzata da una serie di proprietà.*

Succede pure in aritmetica e algebra, con concetti quali i numeri primi, i numeri al quadrato, i polinomi irriducibili, ecc..
- *... "* (David Tall, articolo citato, pag. 195-196).

Il primo tipo di compressione, lo sviluppo di automatismi appresi, viene spesso applicato a livello di scuola dell'obbligo. Interessante ad esempio il caso degli automatismi applicati nelle strategie di calcolo mentale. Supponiamo ad esempio di voler calcolare a mente 14 x 37. Chiaramente sono possibili diverse strategie per risolvere il calcolo in questione, una possibilità è la seguente:

$$14\times37 = (10+4)\times37 = 10\times37 + 4\times(30+7) = 10\times37 + 4\times30 + 4\times7 = 370 + 120 + 28 = 518$$

Sfruttando la proprietà distributiva della moltiplicazione si scompone l'espressione in una somma di prodotti facili da risolvere a mente. Nella risoluzione di questa espressione sfruttiamo diversi automatismi appresi: l'utilizzo della proprietà distributiva, la moltiplicazione per 10, la moltiplicazione di piccoli numeri interi $(4\times3, 4\times7)$. Questi automatismi sono stati sviluppati durante la scuola elementare e costituiscono un elemento irrinunciabile per sviluppare strategie di calcolo mentale.

Il secondo tipo di compressione, il passaggio ai procetti, è caratteristico della scuola media e si produce al termine di un cammino che ha portato l'allievo dall'incapacità di risolvere una data situazione problema fino al procetto relativo alla situazione data, ovvero alla capacità di pensare simbolicamente alla procedura adottata per risolvere il problema. Tall (articolo citato, pag. 200) identifica cinque stadi di sviluppo (compressione) rispetto a una data situazione problema: (i) l'allievo non è in grado o è in grado solo parzialmente di risolvere la situazione data, (ii) l'allievo è in grado di risolvere la situazione problema attraverso un'unica procedura passo per passo, (iii) l'allievo padroneggia diverse procedure ed è in grado di scegliere in modo da migliorare l'efficienza, (iv) l'allievo possiede alternative concettuali che permettono di sviluppare una strategia di risoluzione flessibile, (v) l'allievo è in grado di concepire a livello simbolico l'approccio alla risoluzione della situazione data, il cammino è stato interiorizzato sotto forma di procetto.

Pensando ad esempio al concetto di somma, lo stesso viene di regola sviluppato a partire dalla fine della scuola dell'infanzia o dall'inizio della scuola elementare, dove i bambini sono in grado di effettuare somme di piccoli numeri, spesso facendo riferimento ad oggetti concreti, fino all'età adulta, dove il simbolo + identifica tutta una serie di operazioni e/o procedure che possono essere svolte in diversi insiemi. Spesso il passaggio ad una dimensione simbolica avviene a scuola media, dove le capacità a livello cognitivo e metacognitivo permettono all'allievo di astrarre a livello simbolico dei concetti e delle procedure vissuti concretamente in precedenza.

Anche per quanto riguarda il terzo tipo di compressione, ossia la categorizzazione e la denominazione, la scuola media è una tappa di passaggio fondamentale, dove esperienze numerose e variegate con concetti fondamentali della matematica (numeri, geometria, misure, ecc.) sviluppate nel corso della scuola dell'infanzia e della scuola elementare possono essere categorizzate e sintetizzate grazie alle accresciute capacità di astrazione degli allievi.

I tre mondi della matematica

Sul concetto di astrazione sono basati i **tre mondi della matematica** introdotti da Tall per descrivere il processo di interiorizzazione e astrazione dei concetti matematici.

"The long-term construction of mathematical knowledge uses the power of the biological brain, with input through perception, output through action and the internal power of reflection to re-assemble ideas into useable mental structures. I hypothesise that mathematical thinking evolves through three linked mental worlds of mathematics, each with its own particular way of developing greater sophistication:
- *an **object-based conceptual-embodied world** reflecting on the senses to observe, describe, define and deduce properties developing from thought experiment to Euclidean proof;*
- *an **action-based proceptual-symbolic world** that compresses action- schemas into thinkable concepts operating dually as process and concept (procept);*

- *a* ***property-based formal-axiomatic world*** *focused to build axiomatic systems based on formal definitions and set-theoretic proof."* (David Tall, articolo citato, pag. 197).

"*La costruzione a lungo termine della conoscenza matematica sfrutta il potere del cervello, con* ***input tramite la percezione, output tramite l'azione*** *e il potere interno della* ***riflessione per riordinare la idee in modo da renderle pensabili e quindi utilizzabili*** *a livello mentale. Ipotizzo che il pensiero matematico evolva attraverso tre stadi, tre mondi della matematica, connessi tra loro, ciascuno con il proprio particolare modo di sviluppare e/o affrontare una crescente complessità (Tall 2004):*

- *un* ***mondo concettuale – incorporato****, basato sugli oggetti, che fa riferimento ai sensi per osservare, descrivere, definire e dedurre proprietà, partendo da esperimenti di pensiero fino a dimostrazioni di tipo euclideo;*
- *un* ***mondo procettuale - simbolico****, basato sull'azione, dove schemi d'azione sono compressi in concetti pensabili con la doppia funzione di processo e concetto (procetto);*
- *un* ***mondo formale – assiomatico****, basato sulle proprietà, consistente in sistemi di assiomi, definizioni formali e dimostrazioni basate sulla teoria degli insiemi."* (David Tall, articolo citato, pag. 197).

L'apprendimento di qualsiasi concetto matematico ha inizio con esperienze concrete, basate sui sensi e vissute con il proprio corpo (*embodied*). Ad esempio, l'apprendimento del concetto di numero ha inizio nella manipolazione e nel conteggio di oggetti nella scuola dell'infanzia, oppure l'apprendimento della geometria piana e nello spazio ha inizio con la manipolazione o la costruzione di oggetti e/o figure geometriche. **Queste esperienze, prevalenti ma non esclusive a livello di apprendimento della matematica nella scuola dell'infanzia e della scuola elementare, perdono gradualmente d'importanza nella scuola media e nelle scuole secondarie dove la dimensione simbolica prende il sopravvento**. Infine, per coloro che proseguono con una carriera di studi scientifici, la dimensione simbolica viene ulteriormente astratta per giungere a definizioni formali e a sistemi di assiomi. A livello di scuola dell'obbligo la terza dimensione è relativamente irrilevante per gli allievi, ma va tenuta in considerazione dal/la docente affinché non si creino involontariamente ostacoli agli allievi che in seguito intraprenderanno questa via.

Tall riassume bene i tre mondi quando indica (articolo citato, pag. 203) quali sono le rispettive modalità di argomentazione:

- nel mondo concettuale-incorporato una proprietà vale perché **la si vede**, la si percepisce;
- nel mondo procettuale-simbolico vale perché **la si calcola**;
- nel mondo formale assiomatico vale perché **la si può derivare tramite procedure logiche** a partire da assiomi dati.

Nonostante, con l'avanzare dell'età, la dimensione simbolica tenda ad assumere la prevalenza, l'esperienza fisica e percettiva non può essere mai tralasciata. Ad esempio chiunque, di fronte a un problema geometrico di una certa complessità, di regola inizia tracciando uno schizzo della situazione. Il disegno di una situazione geometrica è un tipico esempio di rappresentazione a livello percettivo. Poi in seguito può darsi che il problema venga risolto anche esclusivamente con il calcolo, dunque a livello simbolico, ma **le esperienze percettive fungeranno sempre e in qualsiasi caso da fondamenta per il livello simbolico, un terreno solido su cui appoggiarsi in caso di necessità**. Forse proprio per questo motivo, quando si pone un allievo di fronte a situazioni problema complesse, spesso si assiste a un'apparente regressione dal mondo simbolico a quello percettivo.

In generale, a un certo momento dello sviluppo, gli allievi (in particolare i più dotati) tenderanno di fronte a determinate situazioni problema a privilegiare la dimensione simbolica, mentre di fronte ad altre situazioni tenderanno a rifugiarsi o a privilegiare la dimensione percettiva (in particolare gli allievi più in difficoltà). Il continuo passaggio dalla dimensione percettiva a quella simbolica e viceversa è un processo virtuoso che dovrebbe avvenire sempre, in particolare a scuola media, facendo bene attenzione di non forzare la dimensione simbolica (creando difficoltà ulteriori agli allievi già in difficoltà o privando altri allievi delle necessarie fondamenta), rispettivamente evitando di soffermarsi eccessivamente nella dimensione percettiva (limitando artificialmente gli allievi più dotati e motivati rispetto al problema dato).

Quando si progetta e/o si realizza un'attività didattica in matematica è fondamentale decidere a quale dimensione di vuole dare la prevalenza, tenendo ben in conto che nessun apprendimento di tipo simbolico può avvenire senza che sia prima avvenuta un'esperienza a livello concreto e che nessun apprendimento in matematica parte da zero. In questo senso, sono interessanti i concetti di *set-before* (impostato-prima) e *met-before* (incontrato-prima) introdotti da Tall nell'articolo. Con *impostato-prima*, Tall intende un concetto matematico presente nella testa dell'allievo da prima o poco dopo la nascita, come ad esempio la numerosità di piccoli insiemi. Con *incontrato-prima*, invece, s'intende un concetto, una procedura, una strategia, ecc. già sviluppata in precedenza dall'allievo, che viene riattivata in un nuovo contesto (articolo citato, pag. 198-199). Dal punto di vista didattico la differenza tra *impostato-prima* e *incontrato-prima* è irrilevante, di conseguenza Tall usa il secondo termine per indicare entrambi.

In alcuni casi, gli *incontrati-prima* hanno un ruolo positivo e utile nell'affrontare una nuova situazione problema; in altri casi invece si rivelano inadeguati alla nuova situazione e quindi da eliminare e/o ristrutturare. La costruzione a lungo termine del pensiero matematico non si prefigura dunque come una costruzione lineare, quanto piuttosto come un continuo processo di evocazione, ristrutturazione e ampliamento, se non addirittura di eliminazione per quanto possibile, di *incontrati-prima*.

Visto quanto discusso in precedenza, parte degli *incontrati-prima* che si riscontrano lavorando a livello procettuale-simbolico si situano inesorabilmente nel mondo concettuale-incorporato. Allo stesso modo, lavorando a livello formale-assiomatico, si riscontrano incontrati-prima afferenti ai due mondi precedenti. In sintesi, è inevitabile che lavorando in un mondo si sia confrontati anche con aspetti dei mondi precedenti. Per poter essere realmente efficace ed incisivo, il/la docente non può dunque fare astrazione di questi aspetti nel progettare e realizzare attività didattiche per e con i suoi allievi.

Un ulteriore elemento di complessità è dato dal fatto che gli *impostati-prima* e gli *incontrati-prima* sono altamente soggettivi, essendo strettamente legati alle caratteristiche e alle esperienze di ciascun individuo. Di conseguenza, il/la docente dovrebbe fare in modo di considerare, nel limite del possibile, le caratteristiche individuali di ciascun allievo rispetto a un dato concetto matematico o a una data situazione problema per poter fornire un reale contributo allo sviluppo del suo pensiero matematico.

Sulla base di queste brevi considerazioni teoriche, abbiamo elaborato una serie di raccomandazioni pratiche rivolte ai docenti di matematica di scuola media (ma non solo..). In seguito elenchiamo le raccomandazioni più significative, separate per autore/autrice. Abbiamo deciso di riportare le raccomandazioni nella loro forma originale sviluppata in classe, senza eliminare eventuali ridondanze di cui ci scusiamo con i lettori.

Consigli concreti per favorire lo sviluppo del pensiero matematico a lungo termine degli allievi a scuola media alla luce della teoria dei tre mondi della matematica di D. Tall

Angelo Ricci

1. I met-before sono molto importanti per tutte le persone, docenti, allievi e uomo comune. Sono parte del nostro essere, della nostra persona e rappresentano in un certo senso gli occhi attraverso cui viene filtrato e interpretato tutto quello che ci circonda. Quindi il primo passo da affrontare per un docente è senz'altro quello di cercare di conoscere il più possibile i met-before dei suoi allievi. A tal fine possiamo usare tutti i metodi che riteniamo opportuni: brainstorming, esercizi mirati ecc.

2. Il passo successivo è quello di mettere in crisi tutti quei met-before che rappresentano un limite all'apprendimento di nuovi concetti o alla riformulazione di argomenti già noti e tramite questa messa in crisi preparare il terreno per costruire qualcosa di nuovo o di diverso rispetto a quanto già appreso. Questo processo ha l'indubbio vantaggio collaterale di minare le certezze dell'allievo, insinua il dubbio in quelle che fino ad allora vedeva come certezze, come verità assolute.

3. Da ciò scaturisce anche il terzo consiglio: minare le certezze dell'allievo al di là della matematica, in altri campi. Nei discorsi che spesso vengono affrontati in classe e che esulano dalla materia

insegnata bisogna cercare di minare tutto quello che i ragazzi considerano come verità assolute, con le dovute accortezze del caso e andandoci sempre con i piedi di piombo ovviamente. Solo chi dubita è naturalmente aperto alle novità. Chi ha certezze di solito non accetta il nuovo.

Mattia Chiesa

1. Caro collega, nelle tue classi, sicuramente avrai avuto modo di osservare che alcuni ragazzi sentono la necessità di spostare i concetti appresi nel mondo concreto in quello simbolico. Ti prego quindi di dare valore a questa necessità, prevedendo per loro delle attività che stimolino e accrescano questo bisogno (Mattia Chiesa).

2. Cerca comunque di non far perdere di vista, a questi ragazzi, anche il legame che la matematica ha con il mondo sensoriale, lascia loro la possibilità di viaggiare continuamente (andata e ritorno) tra lo spazio sensoriale e quello simbolico (Mattia Chiesa).

3. Bisogna ricordarsi però che spesso nel corso della scuola media il legame con il mondo sensoriale risulta essere molto fragile (per esempio quando trattiamo la moltiplicazione tra numeri negativi). Per consolidare e far comprendere tali argomenti bisogna perciò rafforzare le basi simboliche che portano alla loro comprensione e partire da queste ultime senza per forza cercare un legame, per altro molto debole, con l'aspetto sensoriale (Mattia Chiesa).

Antonino Rigogliuso

1. Bisogna costruire, rafforzare e soprattutto utilizzare quanto già appreso. Gli studenti non devono essere considerati della tabula rase, delle lavagne bianche su cui "scrivere" – a ogni lezione – un argomento, un'idea o un procedimento. Ogni studente ha le proprie caratteristiche e capacità che sono innate, ossia scritte nel proprio codice genetico. Alcuni concetti matematici rudimentali risultano essere già presenti, in ogni individuo, fin dalla nascita e rappresentano il punto di partenza (set-before) del nostro sviluppo e apprendimento cognitivo.

2. Bisogna tener conto di questi set-before che, sebbene contraddistinguano il singolo individuo alla nascita, rappresentano la base del successivo sviluppo cognitivo nei cosiddetti met-before. I met-before, ossia le strutture mentali presenti in ognuno di noi e già metabolizzate nel corso degli anni, sono fondamentali nell'apprendimento e soprattutto nella crescita cognitiva di ognuno e, quindi, del singolo allievo.

3. Poiché i met-before possono o facilitare o ostacolare l'apprendimento di concetti matematici (e non) nel singolo studente; si consiglia pertanto, un accurato lavoro di ricerca che li faccia emergere durante la continua fase d'apprendimento degli studenti. In questo modo sarà possibile costruire percorsi didattici più idonei ed efficienti. Attività di brainstorming, di raccolta dei prerequisiti e di laboratorio devono, pertanto, "giocare" un ruolo fondamentale.

Fabian Oehen

1. L'insegnante deve cercare, mediante una ricerca continua, di comprendere quali sono i met-before (set-e met-before) degli alunni. Quest'analisi permetterà al docente di rispondere alle seguenti domande:

    - Posso insegnare il nuovo argomento basandomi sui procetti (processi e concetti) già presenti in classe?
    - Quali procetti devo mettere in crisi prima d'introdurre il nuovo argomento?
    - Quale strategia è la più efficace da usare con questi alunni?
    - Quanto posso spingere nell'efficienza questi alunni?

Cercare d'insegnare un nuovo argomento senza porsi queste domande è inefficace ed insensato. Il docente deve comprendere i met-before degli alunni e sfruttarli come strumento per migliorare l'insegnamento e l'apprendimento.

2. Di regola un problema matematico può essere risolto utilizzando diverse strategie. Il docente deve mostrare più strategie e indicarne le differenze di efficacia ed efficienza. Questo permetterà all'alunno di consolidare le nozioni e formare nuovi procetti.
3. Il docente deve cercare di portare l'alunno alla necessità di passare al mondo simbolico. Ma questo passaggio dal mondo dei sensi al mondo simbolico è sentito come utile e/o necessario solo se l'alunno è confrontato con esercizi con una determinata complessità.

Giulia Ranocchia:

1. Molto spesso partire da un esempio concreto per poi trovare la regola universale può essere utile all'allievo per comprendere il problema proposto. Seguire un processo graduale, dal particolare al generale, può aiutare a semplificare il problema agli occhi dell'allievo e renderlo più comprensibile.

2. Essere sempre capaci di proporre i nuovi concetti utilizzando molteplici esempi e fornendo sempre più di un punto di vista sull'argomento. Non focalizzarsi su un'unica versione o spiegazione, che può risultare chiara ai nostri occhi ma non a quella degli allievi.

3. Il linguaggio algebrico può talvolta essere introdotto in un secondo momento, dopo che lo studente ha compreso qual è il problema che si sta affrontando. Questo infatti può essere fonte di una difficoltà supplementare e può anche essere introdotto in un secondo momento.

Igor Tamagni:

1. Considerare il fatto che ogni allievo ha delle capacità innate differenti e che non si potrà mai portare tutti allo stesso livello. Il "ciò che siamo" rende per alcuni ragazzi la matematica di facile comprensione, per altri invece essa risulta essere difficile.

2. Considerare il fatto che ogni allievo ha vissuto delle esperienze diverse che hanno segnato il loro sviluppo nella conoscenza della matematica. In classe si hanno differenti "contenitori" di esperienze ed è utile poterle conoscere per poi agganciarsi ad esse quando il docente spiega le varie tematiche agli allievi. Sfruttando le varie esperienze vissute dagli allievi, essi possono basare su qualcosa di concreto che hanno vissuto.

3. Considerare che le esperienze vissute dagli allievi di oggi, sono diverse dalle esperienze che vivranno gli allievi che frequenteranno le medie fra 10 anni, che saranno a loro volta diverse dal vissuto dei ragazzi che andranno a scuola fra 20 anni. È importante che un docente si "aggiorni" sul vissuto degli allievi, così da poter agganciarsi a situazioni che esse hanno vissuto nella loro infanzia. Evitare di proporre sempre gli stessi esempi di vita reale, i quali potrebbero non essere stati vissuti dai propri ragazzi.

Jennifer Andreotti:

1. Se possibile, presentare situazioni diversificate del mondo concreto (conceptual-embodied) in modo che l'allievo non identifichi il concetto matematico con un'unica situazione concreta. Credo che questo possa aiutare a rendere meno forti queste connessioni e quindi a facilitare il passaggio al livello simbolico.

2. Scoprire e imparare quanto più possibile dei "met-before" degli allievi sia attraverso delle attività introduttive sia attraverso la conoscenza dei piani di studio delle scuole elementari.

3. Esplicitare i "met-before" o le concezioni che potrebbero creare problemi e metterle in discussione apertamente.

Lara Caverzasio:

1. Non rinnegare quanto già appreso dagli allievi bensì utilizzare il sapere che ognuno possiede per costruirne di nuovi. Per fare questo prevedere sempre una fase iniziale di ricerca e conoscenza.

2. Prevedere compiti o stimoli differenziati in base alle conoscenze del singolo, per quelli più preparati riservare ad esempio esercizi o richieste più articolate.

3. Non dimenticarsi mai che l'apprendimento è si influenzato dal passato ma a sua volta influenza il futuro: quanto si insegna oggi sarà un met-before domani.

Letizia Sciolli:

1. Passare spesso tra i primi due livelli (concettuale-incorporato e procettuale-simbolico) con vari esercizi.

2. Proporre e analizzare situazioni che prediligano soluzioni solo in un livello.

3. Con le classi dei corsi base utilizzare molto il primo livello (geometria e artefatti), senza però trascurare il secondo.

Massimo Immersi:

1. In primo luogo bisogna riuscire a fare emergere i set-before ed i met-before della classe, questo per conoscere la classe col quale si ha a che fare. Potrebbe essere utile conoscerli anche per avere un'idea del vissuto dei ragazzi. La cosa più importante è sapere come agire per far manifestare queste capacità ed essere in grado di coglierle e sfruttarle.

2. Sfruttare i set-before ed i met-before della classe per, assieme, costruire un percorso didattico ideale fatto di momenti in cui loro sono chiamati a sfruttare queste conoscenze per arrivare ad altre conoscenze, naturalmente con il docente che, attento, cerca di mantenere la direzione della lezione sui binari voluti con ben in chiaro l'obiettivo da raggiungere. L'ideale sarebbe riuscire a costruire un percorso didattico efficace che possa fare leva su delle preconoscenze o dei concetti già assimilati dalla classe per appoggiarvisi e sviluppare poi il resto del cammino.

3. Non possiamo illuderci che fare una lezione di ricapitolazione su un determinato argomento appena trattato porti tutti allo stesso livello perché, ogni allievo ha un livello di comprensione diverso dall'altro e ogni allievo assimilerà un concetto in un modo e tempo diverso.

Nastasia Reale:

1. Prepararsi bene su ciò che si vuole spiegare agli allievi: una non padronanza da parte del docente implica insicurezza per gli allievi.

2. Prevedere degli itinerari con schede differenziate, per favorire l'apprendimento di tutti gli allievi.

3. Prevedere degli itinerari, ed in particolare delle attività, più o meno concrete in base alla classe che si ha di fronte.

Silvia righetti:

1. La matematica (come tutte le altre discipline) è sempre in movimento e noi nel ruolo di docenti dobbiamo essere in continuo aggiornamento e aperti alle nuove realtà.

Shady Goro:

1. Ogni individuo ha un suo modo di pensare e di conseguenza una sua logica, per questo motivo il docente deve essere particolarmente propenso ad ascoltare e comprendere i propri allievi.

2. Bisogna risvegliare negli allievi il desiderio della ricerca di nuove strategie risolutive che permettano loro di allargare i propri orizzonti. Spesso questo desiderio è indotto mettendo in crisi le certezze degli allievi attraverso opportune situazioni problema.

Pietro Lurati:

1. Si deve tenere sempre in considerazione il bagaglio di conoscenze già acquisito da l'allievo, in modo da facilitargli l'apprendimento di concetti superiori, favorendo il passaggio da un approccio sensoriale ad uno più astratto.

2. È importante creare e/o proporre delle situazioni d'apprendimento in modalità laboratoriale, dove l'allievo sia chiamato a lavorare, con l'aiuto di altri compagni, su una situazione problema per il quale sia necessario trovare una nuova strategia risolutiva.

3. La riorganizzazione della conoscenza pregressa è una parte basilare della costruzione del nostro sapere.

Gabriele Caffi:

1. Dovremmo insegnare agli allievi come memorizzare e ricordare. Lo studio mnemonico di nozioni o formule, sebbene ricopra una "piccola" parte della matematica insegnata nella scuola media, potrebbe essere più semplice per gli allievi se ragionassero sul loro significato. Ad esempio, la formula dell'area del trapezio:

   $$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

   può essere semplicemente vista come un groviglio di lettere da studiare a memoria, oppure ricostruita in modo opportuno riconducendosi all'area di un rettangolo.

Alberto Piatti

1. Il ritorno a una dimensione percettiva è rassicurante per studenti di qualsiasi età. Si può sfruttare questo aspetto per aiutare allievi in difficoltà a rinfrancarsi in una data situazione problema, ad esempio fornendo come aiuto un disegno, un oggetto, ecc.

2. La scelta del mondo su cui focalizzare una data attività è una scelta fondamentale, che implica forzatamente un livello di complessità diverso per l'allievo. La stessa situazione problema spesso si presta ad essere affrontata in diversi mondi. Da questo punto di vista, proporre a tutti gli allievi la stessa situazione problema permettendo loro di scegliere liberamente le strategie risolutive e il mondo in cui muoversi può essere uno strumento interessante di differenziazione didattica.

3. Il passaggio da un mondo al successivo non implica necessariamente un aumento di complessità delle situazioni affrontate. A scuola media è possibile proporre problemi molto semplici a livello simbolico, così come situazioni molto complesse a livello percettivo. Se pensi ad esempio che tutti gli Elementi di Euclide sono basati esclusivamente su un approccio di tipo percettivo basato sulle costruzioni geometriche. In questo senso è interessante esplorare i limiti di ciascun mondo,

proponendo ad esempio situazioni molto complesse a livello percettivo, come potrebbero essere alcune costruzioni geometriche molto complesse da realizzare con riga e compasso.

4. Nello sviluppo dei procetti è fondamentale riuscire a possedere ed essere in gradi di confrontare strategie risolutive diverse per un problema dato. Quando fate risolvere una situazione problema ai vostri allievi fate in modo di evidenziare le diverse strategie emerse (giuste o sbagliate che siano) in modo che posano essere discusse, confrontate ed eventualmente corrette. Concretamente, al termine di un momento di risoluzione a gruppi o individuale, chiedete a più allievi contemporaneamente (che abbiano sviluppato strategie differenti) di scrivere contemporaneamente le loro soluzioni alla lavagna. Lasciate che ciascuno descriva quanto fatto, quindi fate tornare tutti al posto (in modo che le soluzioni vengano spersonalizzate) e aprite una discussione su quali siano le strategie più o meno corrette, rispettivamente efficaci e/o efficienti.